ГИА–2013 по математике для «чайников»: советы репетитора

Шаг №2: «ВЫРАЖЕНИЯ»

El Corto

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ГИА в 2013 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки

ГИА-2013 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА.

Пособие состоит из 5 тематических разделов–шагов, в соответствии с которыми,
как мне представляется, довольно удобно готовиться к этому экзамену.

А именно:

- ✓ Шаг №1: «Числа»
- ✓ Шаг №2: «Выражения»
- ✓ Шаг №3: «Текстовые задачи»
- ✓ Шаг №4: «Уравнения»
- ✓ Шаг №5: «Неравенства»

Для удобства подготовки к экзамену Пособие
ГИА-2013 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА
составлено не в порядке номеров заданий (№1, №2, №3 и так далее),
а в некоем условном порядке:
Числа – Выражения – Текстовые задачи – Уравнения – Неравенства.

Поскольку это Пособие предназначено для «чайников», в него включены не все задания
вариантов ГИА, и даже не все задания его 1-й части.

ВНИМАНИЕ!

Предлагаемое пособие составлено «по мотивам» последних 3-х лет, поэтому оно не соответствует
демоверсии экзамена ГИА-2013 буквально.
Выбирайте в пособии только то, что считаете для себя нужным!

Все то существенное, что обычно принято писать во введении к различным книжкам,
вы найдете на сайте http://www.EGEprosto.ru.

Кроме того, там можно поразглядывать много забавных картинок ☺!

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся)
вы можете отправить мне через меню «Обратная связь» этого сайта.

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

2. ВЫРАЖЕНИЯ

2.1. «НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ»

ЗАДАНИЕ 2.1.1. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\mathbf{1,4x^3+0,3x-2}$ ПРИ $\mathbf{x=-2}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Что касается выбора способов решения подобных заданий, то их можно условно разделить на две группы:

- ✓ Сразу «тупо подставить» числа вместо букв (здесь, например, вместо x подставить -2) и перейти к вычислениям;
- ✓ Сначала как-то преобразовать исходное выражение (увидеть в нем формулу сокращенного умножения и применить ее, привести дроби к общему знаменателю и так далее), а только после этого подставлять в него числа.

В этом примере мудрить не нужно – сразу подставляем в исходное выражение $x=-2$:

$$1{,}4x^3+0{,}3x^2-2=1{,}4(-2)^3+0{,}3(-2)^2-2=1{,}4(-8)+0{,}3\cdot4-2=-1{,}4\cdot8+0{,}3\cdot4-2=$$
$$=-11{,}2+1{,}2-2=-10-2=-12$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-12

ЗАДАНИЕ 2.1.2. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $3x + 2y^2$ ПРИ $x = \frac{5}{6}, y = \frac{1}{2}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

И здесь, очевидно, преобразовывать нечего – подставляем числа в исходное выражение.

$$3x + 2y^2 = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = (*) = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{15}{6} + \frac{2}{4} = \frac{15 \cdot 2}{6 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} =$$
$$= \frac{30}{12} + \frac{6}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

Записанное выше вычисление можно было «запустить» и по несколько другому пути, например, с места $(*)$ таким образом:

$$(*) =< \text{сокращаем числители и знаменатели} >= \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

А можно (при желании) придумать еще что-нибудь.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.1.3. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\frac{6x-y}{x+y}$ ПРИ $x = 0,5, \ y = 1,5$.

1) 0,66 2) 1,5 3) 1,33 4) 0,75

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В этом примере значения «буковок» даны в десятичных числах. Похоже, что переводить их в простые дроби здесь не нужно
(при необходимости можно было сделать замену $0,5 = \frac{1}{2}; \ 1,5 = \frac{3}{2}$).

Подставляем числа в «исходник»:

$$\frac{6x - y}{x + y} = \frac{6 \cdot 0,5 - 1,5}{0,5 + 1,5} = \frac{3 - 1,5}{2} = \frac{1,5}{2} = \frac{15}{20}$$

Поскольку все ответы даны в десятичных числах, и нам нужно ответ привести именно к такому числу. Делаем последний рывок:

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100} = 0,75$$

Этот же рывок можно сделать и по-другому:

$$\frac{15}{20} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75$$

Или как-нибудь еще (в том числе, начиная не с $\frac{15}{20}$, а с другого места цепочки вычислений). Попробуйте, и у вас получится!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.1.4. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\frac{7}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ПРИ $x = 1,\ y = 3$.

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку ничего другого не видно, попробуем подставить числа:

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{7}{3} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

Теперь появляется мысль привести все к знаменателю 3:

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{7 - 3 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Вот и все! Все оказалось совсем не больно ☺.

В этом примере гораздо худшим путем была бы попытка привести все три дроби общему знаменателю прямо в буквах. Это привело бы к довольно дикому и менее приятному преобразованию:

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{7xy - 1 \cdot 3y - 1 \cdot 3x}{3xy} = \frac{7xy - 3y - 3x}{3xy} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{21 - 12}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Хотя, можно идти любым путем, лишь бы он приводил к правильному ответу! Решенный пример показывает, что нужно хоть немного продумывать возможные варианты вычислений.
Сделайте паузу, не торопитесь, и может быть вы найдете более простой вариант действий, чем первый пришедший в голову.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.1.5. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\left(a^2+2ab+b^2\right)^2$ ПРИ $a+b=2$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

При разглядывании этого примера выясняется, что числа в него особо и не подставишь, так как чему равно a и b по отдельности – не известно. Продолжаем разглядывать…
Внутри скобок узнается знакомая формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. В этом-то и дело!

$(a^2+2ab+b^2)^2=((a+b)^2)^2=(2^2)^2=4^2=16$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

16

ЗАДАНИЕ 2.1.6. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{(a-1)^2}{4}-\frac{3b}{(a-2b)^2} \quad \text{ПРИ} \quad a=5 \text{ И } b=3.$$

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А это уже что-то значительно более «навороченное». И что с этим делать?...
Конечно, разглядывать! В любом случае числа всегда подставить успеем.

Мысль 1: «распаковка» выражений $(\quad)^2$ по формулам сокращенного умножения приведет к явному усложнению «исходника» с непонятными выгодами.

Мысль 2: привести обе дроби к общему (одинаковому) знаменателю $4(a-2b)^2$ тоже вызовет кучу вычислительных трудностей…

Мысль 3: а может все-таки «тупо подставить» числа? Пробуем:

$$\frac{(a-1)^2}{4}-\frac{3b}{(a-2b)^2}=\frac{(5-1)^2}{4}-\frac{3\cdot 3}{(5-2\cdot 3)^2}=\frac{16}{4}-\frac{9}{(-1)^2}=\frac{16}{4}-\frac{9}{1}=4-9=-5$$

Да, этот вариант оказался гораздо лучше остальных. Но так бывает не всегда!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-5

ЗАДАНИЕ 2.1.7. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\sqrt{1+7x}$ ПРИ $x=-\frac{9}{64}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А здесь, кроме подстановки, ничего и не придумаешь.

$$\sqrt{1+7x}=\sqrt{1+7\cdot\left(-\frac{9}{64}\right)}=\sqrt{1+\frac{7}{1}\cdot\left(-\frac{9}{64}\right)}=\sqrt{1-\frac{7}{1}\cdot\frac{9}{64}}=\sqrt{1-\frac{7\cdot9}{1\cdot64}}=\sqrt{1-\frac{63}{64}}=$$

$$=\sqrt{\frac{64}{64}-\frac{63}{64}}=\sqrt{\frac{64-63}{64}}=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1/8

2.2. «РАЦИОНАЛЬНОЕ ИЛИ ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ?»

В следующей группе заданий требуется выбрать из предлагаемых чисел либо рациональное, либо иррациональное число.

Говоря простым языком (применительно к этим заданиям ГИА), рациональное число – это число, которое можно представить без знака $\sqrt{}$.
А в иррациональном числе никакими преобразованиями совсем избавиться от $\sqrt{}$ нельзя.

Примеры рациональных чисел:

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$

Примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{11} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{11 \cdot 2} = \sqrt{22}.$$

А теперь перейдем к примерам на нахождение рационального (либо иррационального) числа из предлагаемого ряда.

ЗАДАНИЕ 2.2.1. ЗНАЧЕНИЕ КАКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ?

$$\mathbf{1)}\ \left(7\sqrt{5}\right)^2 \qquad \mathbf{2)}\ 2\sqrt{3^8} \qquad \mathbf{3)}\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} \qquad \mathbf{4)}\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКА «ИЗБАВИТЬ ОТ КОРНЯ» КАЖДЫЙ ИЗ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА.

Вариант ответа 1).

$\left(7\sqrt{5}\right)^2 = \left(7\cdot\sqrt{5}\right)^2 = 7^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 = 49\cdot 5$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Вариант ответа 2).

$$2\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^4\cdot 3^4} = (*) = 2\cdot\sqrt{81\cdot 81} = 2\cdot\sqrt{81^2} = 2\cdot 81$$

Опять же, как и во многих других случаях, последнее преобразование можно выполнить и каким-либо другим путем. Например, так:

$$2\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^{4\cdot 2}} =< \text{Правило } 1 >= 2\cdot\sqrt{(3^4)^2} =< \text{Правило } 5 >= 2\cdot\sqrt{81^2} = 2\cdot 81$$

Или, начиная с места $(*)$, так:

$$2\cdot\sqrt{81\cdot 81} = 2\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{81} = 2\cdot 9\cdot 9 = 2\cdot 81.$$

Или как-нибудь еще…
Нужно ясно понимать, что у вас большое количество вариантов вычисления – в любой ситуации выбирайте тот, который вам больше подходит.

Вариант ответа 3).

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$$

Ни $\sqrt{2}$, ни $\sqrt{10}$ не являются целыми числами, их значения мы не знаем.
Попробуем «слить» эти корни в один (как уже делали выше) или представить как произведение других корней, и посмотрим, что из этого получится.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 10} = \sqrt{20} = (?) = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Знак $(?)$ здесь, и в следующих примерах означает размышление – как же продолжить преобразование, чтобы оно оказалось успешным.

Избавиться от корня не получилось и таким путем (возможно именно этот вариант будет нашим ответом?).

Вариант ответа 4).

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

Ни $\sqrt{5}$, ни $\sqrt{20}$ не являются целыми числами, их значения мы не знаем.
Попробуем «слить» эти корни в один или представить как произведение других корней, и посмотрим, что получится.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{5:5}{20:5}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, не получилось избавиться от корня в варианте 3).
Как мы ранее и предположили, это число и будет иррациональным.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

И еще одно подобное задание.

ЗАДАНИЕ 2.2.2. ЗНАЧЕНИЕ КАКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ?

$$\mathbf{1)}\ (5\sqrt{7})^2 \qquad \mathbf{2)}\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{12} \qquad \mathbf{3)}\ 4\sqrt[3]{27} \qquad \mathbf{4)}\ \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКА «ИЗБАВИТЬ ОТ КОРНЯ» КАЖДЫЙ ИЗ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА.

Вариант ответа 1).

$(5\sqrt{7})^2 = (5\cdot\sqrt{7})^2 = 5^2\cdot(\sqrt{7})^2 = 25\cdot 7$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Вариант ответа 2).

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{5\cdot 12} = \sqrt{60} = (?) = \sqrt{4\cdot 15} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{15} = 2\cdot\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

Корень сохранился. Как-то еще разбить 60 на два сомножителя, чтобы из каждого извлекался корень не получается (например, $60 = 30\cdot 2$; $60 = 3\cdot 20$; $60 = 8\cdot 7{,}5$ …).
Возможно, выражение $\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ - кандидат в ответы.

Вариант ответа 3).

$4\sqrt[3]{27} = 4\cdot\sqrt[3]{27} = 4\cdot\sqrt[3]{9\cdot 3} = 4\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3} = 4\cdot\sqrt[3]{(3)^3} = 4\cdot 3$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Как вариант, $\sqrt[3]{27}$ можно запомнить или найти «подбором»: $3\cdot 3\cdot 3 = 27$, значит $\sqrt[3]{27} = 3$.

Таким образом, наши «подозрения» насчет окончательного ответа в этом задании подтвердились.

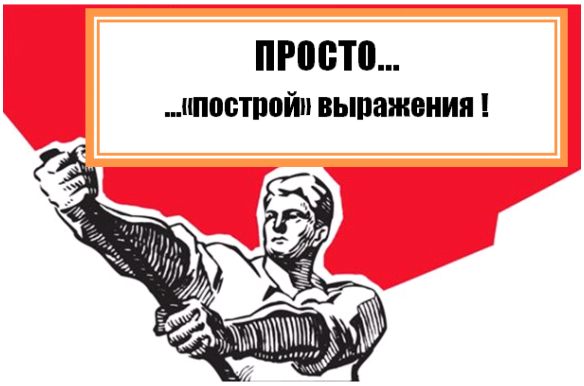
2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Следующая группа заданий перекликается с предыдущей в том смысле, что связана с преобразованием выражений, в том числе содержащих $\sqrt{}$.

2.3. «СРАВНИТЕ ВЫРАЖЕНИЯ»



ЗАДАНИЕ 2.3.1. **ЧИСЛА x, y, z МЕНЬШЕ НУЛЯ. РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ ЧИСЛА x^2, y^2, z^2, ЕСЛИ $x < y < z$.**

1) z^2, y^2, x^2 2) y^2, z^2, x^2 3) x^2, z^2, y^2 4) x^2, y^2, z^2

В таких заданиях, где знак всех переменных известен (здесь – все они меньше нуля) проще всего вместо «буковок» сразу же подставить какие-нибудь простые числа, и дальше уже работать именно с ними. Покажем это на нескольких примерах.

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В условии говорится, что $x < y < z$, и все эти числа меньше нуля. Пусть тогда они у нас станут числами $-3, -2, \text{и} -1$ соответственно. Теперь осталось всего лишь вычислить x^2, y^2, z^2.

Итак,

$$x^2 = (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$y^2 = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$z^2 = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Если расположить эти числа в порядке ↑, то получится вариант ответа 1).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.3.2. **ЧИСЛА b И c ОТМЕЧЕНЫ ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ (СМ. РИС. 2.3.2).**

РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ ЧИСЛА $1-c;\ \frac{1}{c};\ \frac{1}{b}$.

$$1)\ \frac{1}{b}; 1-c;\ \frac{1}{c} \qquad 2)\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c}; 1-c \qquad 3)\ 1-c;\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c} \qquad 4)\ \frac{1}{c};\ 1-c;\ \frac{1}{b}$$

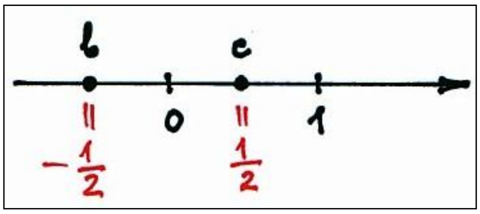


РИСУНОК 2.3.2

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Пусть будет $c = \frac{1}{2}$, а $b = -\frac{1}{2}$ (что, похоже, и соответствует рисунку).

Тогда

$$1 - c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{c} = 1 : c = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{b} = 1 : b = \frac{1}{1} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{1} : \frac{1}{2} = -\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = -2$$

Исходный ряд чисел (данный в условии), таким образом, будет выглядеть так:

$$\frac{1}{2};\ \ 2;\ -2.$$

Расположим его в порядке ↓: $2;\ \frac{1}{2};\ -2$, что соответствует варианту ответа 4).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.3.3. НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ ОТМЕЧЕНЫ ЧИСЛА m И n (СМ. РИС. 2.3.3). КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ УТВЕРЖДЕНИЙ НЕВЕРНО?

$$\mathbf{1)}\ n+m<0 \quad \mathbf{2)}\ n-m>0 \quad \mathbf{3)}\ \frac{n}{m}<-1 \quad \mathbf{4)}\ m-2n<0$$

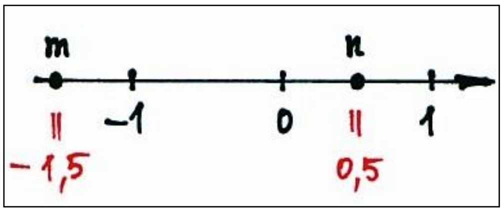


РИСУНОК 2.3.3

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Судя по рисунку, $m=-1{,}5;\ n=0{,}5$. Эти числа и возьмем в качестве вполне пригодных. Подставим выбранные значения во все (!) варианты ответов и посмотрим, что получится.

$$n+m=0{,}5+(-1{,}5)=0{,}5-1{,}5=-2{,}0=-2\ \ (\text{верно, так как}\ \ -2<0)$$

$$n-m=0{,}5—1{,}5=0{,}5+1{,}5=2{,}0=2\ \ (\text{верно, так как}\ \ 2>0)$$

$$\frac{n}{m}=\frac{0{,}5}{-1{,}5}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}\ \left(\text{неверно, так как}\ \ -\frac{1}{3}>-1\right)$$

$$m-2n=-1{,}5-2\cdot 0{,}5=-1{,}5-1=-2{,}5\ \ (\text{верно, так как}\ \ -2{,}5<0)$$

Таким образом, неверное утверждение стоит под №3. Его и выбираем.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

Примечание.

Как вы, возможно, заметили, в примере 2.3.2 «буковки» заменены на «обычные», простые дроби, и вычисления проводятся именно с ними. В примере 2.3.3 и в замене, и в вычислениях используются десятичные числа. Кстати, можно использовать оба варианта или комбинировать их, переходя по мере надобности с одного на другой.
Попробуйте оба варианта, «обкатайте» их, а затем выбирайте для себя наиболее удобный!

Успехов вам в подобных заданиях ГИА!

2.4. «МОЖНО ЛИ ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ …?»

Надеюсь, особенности работы с этой группой будут понятны без особых пояснений.

ЗАДАНИЕ 2.4.1. КАКОЕ ИЗ ДАННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ НЕЛЬЗЯ ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ $\frac{\sqrt{30}}{20}$?

$$1)\ \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{10}} \qquad 2)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}} \qquad 3)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}} \qquad 4)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ЗАДАННОМУ ВИДУ.

Вариант ответа 1).

$$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3\cdot 10}}{2\cdot\sqrt{10\cdot 10}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Вариант ответа 2).

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{400}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Вариант ответа 3).

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Первые три выражения нам удалось привести к необходимому виду.
И, хотя есть соблазн «автоматом» выбрать ответ 4), нужно все-таки «отработать» его.
А вдруг и последний вариант тоже приведется к исходному – тогда это будет означать, что где-то произошла ошибка, и ее нужно будет найти!

Вариант ответа 4).

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{10}}=(?)=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{40}}=(?)$$

Преобразование не получилось – понятно, что $\sqrt{40}\neq 20$.

Действительно, ответом оказался вариант 4).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.4.2. КАКОЕ ИЗ ДАННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ $\frac{2}{\sqrt{8}}$?

$$1)\ \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}} \qquad 2)\ \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3,5\cdot\sqrt{8}}} \qquad 3)\ \frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}} \qquad 4)\ \frac{5}{\sqrt{50}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ЗАДАННОМУ ВИДУ.

Вариант ответа 1).

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16\cdot 3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot\sqrt{\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{32}}$$

Мы привели числитель к 2, при этом знаменатель оказался $\neq 8$.

Можно сделать преобразование как-то иначе, на результат будет такой же.

Вариант ответа 2).

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3,5\cdot\sqrt{8}}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3,5\cdot 8}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{28}}=1$$

Понятно, что исходное выражение $\frac{2}{\sqrt{8}}<1$, так как $\sqrt{8}>2$. Ответ 2) не подходит.

Вариант ответа 3).

$$\frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 3}{\sqrt{25\cdot 2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 3}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{9}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

Это затянувшееся вычисление также не привело нас к исходному выражению: мы привели знаменатель к $\sqrt{8}$, но в числителе $\sqrt{12}\neq 2$.

Можно было пойти и более коротким путем:

$$\frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{25}{50}}\cdot\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

<u>Примечание.</u>
В варианте ответа 3) мы приводили знаменатель к $\sqrt{8}$ (а не числитель – к 2) просто потому, что так было удобнее.

Вариант ответа 4).

$$\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{25\cdot 2}}=\frac{5}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2}{\sqrt{8}}$$

Получилось!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

Следующие 3 группы заданий (2.5 – 2.7) так или иначе связаны с преобразованиями выражений:

1) первая связана с так называемыми «тождественными преобразованиями»;
2) вторая и третья связаны с заданиями типа «упростить»
   (именно так, а не «типа упростить» ☺).
   В таком прядке их и рассмотрим.

Но вначале несколько слов по поводу только что написанных умного слова «тождественные».

Назвать «тождественными» для простоты можно такие преобразования, которые производятся без нарушения математических правил. То есть такие преобразования, которые «разрешены» правилами математики. Вот и все!

2.5. «ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

Рассмотрим несколько типовых примеров подобных заданий. Отсутствие теоретических объяснений производимых действий снова компенсируются подробностью вычислений и комментариями к ним. Вопросы, которые у вас могут возникать в процессе чтения, должны отпасть после внимательного рассмотрения этих примеров до конца!

ЗАДАНИЕ 2.5.1. В КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ $(7-x)\cdot(x-4)$?

1) $-(7-x)\cdot(4-x)$ **2)** $(7-x)\cdot(4-x)$ **3)** $(x-7)\cdot(x-4)$ **4)** $-(x-7)\cdot(4-x)$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $-(7-x)\cdot(4-x)=(7-x)\cdot(x-4)$

Убираем минус перед первой скобкой и меняем в разности $4-x$ местами числа. В итоге, в точности получилось исходное выражение! Но (по уже объясненной выше причине) нужно проделать такую попытку со всеми возможными вариантами.

Вариант ответа 2). $(7-x)\cdot(4-x)$

Для приведения этого выражения к исходному нужно всего лишь поменять местами 4 и x.
Но тогда следует поставить минус перед 1-ой скобкой, который окажется лишним.
Попытка преобразования оказалась неудачной.

Вариант ответа 3). $(x-7)\cdot(x-4)$

Это выражение можно привести «почти к исходному», поменяв местами x и 7, но это приведет к ситуации предыдущего варианта и лишним минусом.

Вариант ответа 4). $-(x-7)\cdot(4-x)$

Попытку этого, последнего, преобразования можно сделать и объяснить, по крайней мере, двумя способами.

Способ 1.

Для приведения выражения к исходному нужно поменять местами числа в обеих скобках. Каждая такая замена мест приводит к появлению минуса перед скобкой.
Таким образом, указанная замена мест приведет к выражению:

$$-(x-7)\cdot(4-x) = -(-1)\cdot(-1)\cdot(7-x)(x-4) = -(7-x)(x-4)$$

Два умножаемых " $-$ " дают " $+$ " и исчезают. Но один, лишний, опять остается.

Способ 2.

Как было видно из Способа 1, одновременная смена мест в 2-х скобках не влечет за собой никаких других изменений в исходном выражении. Так мы и делаем: просто меняем местами числа в 2-х скобках, не меняя больше ничего:
$-(x-7)\cdot(4-x) = -(7-x)(x-4)$

<u>Примечание.</u>
Точно так же, «не изменяя больше ничего», можно поменять местами 2 числа, связанных " $-$ ", в любом четном числе скобок (то есть одновременно в 4-х, 6-и, 8-и скобках и так далее).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.5.2. КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ ТОЖДЕСТВЕННО РАВНО ВЫРАЖЕНИЮ $\boldsymbol{x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)}$?

1) $\boldsymbol{(1-x)(x+1)-x(x-2)}$ **2)** $\boldsymbol{-x(2-x)-(x-1)\cdot(1-x)}$
3) $\boldsymbol{-x(2-x)+(1-x)(1+x)}$ **4)** $\boldsymbol{2x-1}$

Здесь то же самое задание сформулировано несколько по-другому.

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $(1-x)(x+1)-x(x-2)$

Глядя на исходное выражение, пытаемся к нему придти.

$$(1-x)(x+1)-x(x-2) = +(1-x)(x+1)-x(x-2) = -x(x-2)+(1-x)(x+1) = (*)$$

Меняем в скобке $(1-x)$ числа местами и заменяем перед этой скобкой " $+$ " на " $-$ ":

$$(*) = -x(x-2)-(x-1)(1+x)$$

Цель почти достигнута, но самый первый минус оказался лишним!

Вариант ответа 2). $-x(2-x)-(x-1)\cdot(1-x)=x(x-2)-(x-1)\cdot(1-x)$

Все бы хорошо, но скобку $(1-x)$ никак не удастся переделать на $(1+x)$. Все, что можно сделать, это $(1-x)$ заменить на $(x-1)$ с вынесением " $-$ ". Эта попытка преобразования тоже неудачна.

Вариант ответа 3). $-x(2-x)+(1-x)(1+x)=x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)$

Перемена мест в скобках $(2-x)$ и $(1-x)$ с вынесением " $-$ " привела нас к успеху!
И все же «отрабатываем» следующий вариант.

Вариант ответа 4). $2x-1$

А в этом случае нужно пойти обратным путем – исходное выражение приводить к данному, сокращая все возможное.

$$x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)=x^2-2x-(x+x^2-1-x)=x^2-2x-x-x^2+1+x=$$
$$=-2x+1=1-2x$$

Понятно, что $1-2x\neq 2x-1$. Попытка неудачна.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.5.3. В КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{x-5}{4-x}\ ?$$

$$1)\ \frac{x-5}{x-4} \qquad 2)\ -\frac{x-5}{4-x} \qquad 3)\ -\frac{5-x}{x-4} \qquad 4)\ -\frac{x-5}{x-4}$$

А вот появились и дроби, которые тоже нужно «тождественно преобразовывать».
Правила работы с дробями (в смысле перемены мест чисел в разности и вынесения минуса) остаются теми же.

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $\frac{x-5}{x-4}=-\frac{x-5}{(4-x)}$ или $=\frac{-(x-5)}{4-x}$ или $=-\frac{x-5}{4-x}$

Полученные варианты выражений явно не равны исходному.

Вариант ответа 2). $-\frac{x-5}{4-x}$

Это выражение мы только что получили выше. Вариант не подходит.

Вариант ответа 3). $-\frac{5-x}{x-4}=-\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=-\frac{x-5}{4-x}$

И опять приходим к уже знакомому результату.

«Фокус» с исчезновением (сокращением) минусов на последнем этапе (было 3 минуса, и вдруг остался 1!) для ясности можно расписать и более подробно. Например, так:

$$-\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=-\frac{-1\cdot(x-5)}{-1\cdot(4-x)}=-\frac{x-5}{4-x}$$

И опять, вместо «автоматического» выбора оставшегося ответа 4), проверяем его!

Вариант ответа 4). $-\frac{x-5}{x-4}=-\frac{x-5}{-(4-x)}=\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=\frac{x-5}{4-x}$

Получилось!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

2.6. «УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ – 1»

Как правило, из всего многообразия различных преобразований, здесь приходится иметь дело только с умножением, делением, сложением и вычитанием дробей. Иногда в процессе решения нужно применять так называемые формулы сокращенного умножения (ФСУ).
Но опять же – не все, а лишь некоторые:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)} \qquad \textbf{(1)}$$

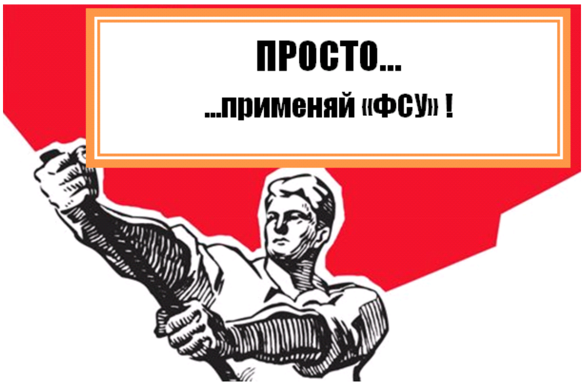
$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

Рассмотрим несколько примеров этой группы заданий.



ЗАДАНИЕ 2.6.1. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби узнается формула (1).

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}=\frac{(3c)^2-d^2}{5d}\cdot\frac{1}{2(3c-d)}=(\text{ф}.1)=\frac{(3c-d)(3c+d)}{5d}\cdot\frac{1}{2(3c-d)}=$$
$$=\frac{3c+d}{5d}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(3c+d)\cdot 1}{5d\cdot 2}=\frac{3c+d}{10d}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел c и d какие-нибудь простые значения ($\neq 0$), например, $c=1$, $d=2$.
После этого сравнить результаты – должны получиться одинаковые выражения или числа.

При такой подстановке

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}=\frac{5}{20}\quad\text{и}\quad\frac{3c+d}{10d}=\frac{5}{20},$$

что говорит о правильности преобразования.

Мне представляется, что для качественной проверки Вариант 2 надежнее, но лучше всего (для подстраховки) выполнить оба варианта.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{3c+d}{10d}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(3c+d)/(10d)}$$

ЗАДАНИЕ 2.6.2. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби «виднеется» формула (3):

$$9a^2+6ab+b^2=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot b+b^2=(3a+b)^2$$

Итак, начнем преобразование:

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{(3a+b)^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{3a+b}{4a}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3a+b}{4a}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел c и d какие-нибудь простые значения ($\neq 0$), например, $a=2$, $b=1$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{7}{8} \quad \text{и} \quad \frac{3a+b}{4a}=\frac{7}{8},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{3a+b}{4a}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(3a+b)/(4a)}$$

ЗАДАНИЕ 2.6.3. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{a^3-b^3}{2ab}\cdot\frac{a}{7a-7b}-\frac{a^2}{14b}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби присутствует формула (5):

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Итак, начнем преобразование:

$$\frac{a^3-b^3}{2ab}\cdot\frac{a}{7a-7b}-\frac{a^2}{14b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{2ab}\cdot\frac{a}{7(a-b)}-\frac{a^2}{14b}=\frac{a^2+ab+b^2}{14b}-\frac{a^2}{14b}=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2-a^2}{14b}=\frac{b(a+b)}{14b}=\frac{a+b}{14}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел a и b какие-нибудь простые значения ($\neq 0$). После этого сравнить результаты.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

$$\boxed{\frac{a+b}{14}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(a+b)/14}$$

ЗАПОМНИТЬ:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)} \qquad (4)$$

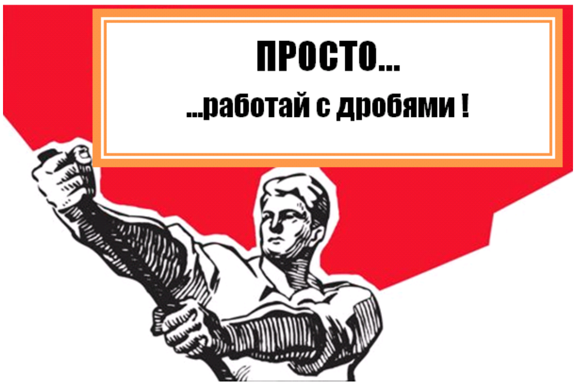
$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)} \qquad (5)$$

Примечание.

Формулы $(a-b)^3$ и $(a+b)^3$ специально можно и не запоминать, если это трудно, а каждый раз вычислять по такой схеме: $(a \pm b)^3 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) = (a \pm b)^2 \cdot (a \pm b) = \cdots$

Следующая группа заданий продолжает начатую в прошлой главе серию по преобразованию выражений, только на этот раз потребуется умение складывать или вычитать дроби.

2.7. «УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ – 2»



ЗАДАНИЕ 2.7.1. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\cdot\frac{1}{m+n}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ЕГО ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

Предложенный в этом задании пример, вероятно, удобнее упрощать по действиям.

1-е действие.

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{2}{1}=\frac{m\cdot m}{n\cdot m}+\frac{n\cdot n}{m\cdot n}+\frac{2\cdot n\cdot m}{1\cdot n\cdot m}=\frac{m^2+n^2+2mn}{n\cdot m}=\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}$$

Содержимое скобок мы привели к общему (одинаковому) знаменателю $n\cdot m$.

2-е действие.

$$\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{m+n}{nm}$$

В этом действии мы сократили числитель и знаменатель на одно и то же выражение $m+n$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел m и n какие-нибудь простые значения ($\neq 0$), например, $m=1$, $n=2$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\cdot\frac{1}{m+n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}+2\right)\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{3}{2}\quad \text{и}\quad \frac{m+n}{nm}=\frac{1+2}{2\cdot 1}=\frac{3}{2},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\frac{m+n}{nm}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$(m+n)/nm$$

ЗАДАНИЕ 2.7.2. НАЙДИТЕ СУММУ ДРОБЕЙ

$$\boldsymbol{\frac{x+5}{x-4}} \text{ И } \boldsymbol{\frac{1-x}{x+1}}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

При выполнении этого задания очень важно сообразить, что требуется всего лишь заменить букву «и» на «+», и посчитать то, что получится ☺.

Вспоминаем: для сложения (или вычитания) дробей нужно привести их к общему знаменателю. В нашем случае это выглядит так:

$$\frac{x+5}{x-4}+\frac{1-x}{x+1}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)}{(x-4)\cdot(x+1)}+\frac{(1-x)\cdot(x-4)}{(x+1)\cdot(x-4)}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)+(1-x)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x+5x+5+x-4-x^2+4x}{(x-4)(x+1)}=\frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}$$

Вот и все сложение дробей!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо x какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $x=5$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{x+5}{x-4}+\frac{1-x}{x+1}=9\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}=9\frac{1}{3},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(11x+1)/[(x-4)(x+1)]}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.3. НАЙДИТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ

$$\frac{x+5}{x+1} \quad \text{И} \quad \frac{1-x^2}{x^2+10x+25}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А при выполнении этого задания нужно сообразить, что буква «и» заменяется умножением «×».

Вспоминаем: для умножения дробей нужно числитель умножить на числитель, а знаменатель на знаменатель. В нашем случае это выглядит так:

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{1-x^2}{x^2+10x+25}$$

При напряженном и пристальном разглядывании ☺ 2-й дроби можно заметить, что и числитель, и знаменатель можно «обработать» с помощью формул сокращенного умножения (чтобы в дальнейшем сократить получившееся с 1-й дробью):

$$1-x^2=(1-x)(1+x) \text{ и}$$

$$x^2+10x+25=x^2+2\cdot5\cdot x+5^2=(x+5)^2$$

Итак, в итоге выходит следующее:

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(x+5)^2}=\frac{1-x}{x+5}$$

Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо x какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $x=2$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{1-x^2}{x^2+10x+25}=-\frac{1}{7}\,,\quad \text{и}\quad \frac{1-x}{x+5}=-\frac{1}{7}\,,$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{1-x}{x+5}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(1-x)/(x+5)}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.4. ПРЕДСТАВЬТЕ ВЫРАЖЕНИЕ $3a+\frac{4-2a^2}{a}$ В ВИДЕ ДРОБИ.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Задание «представить в виде дроби» нужно понимать так: просто сложить два слагаемых, чтобы они оказались под одной дробной чертой.

$$3a+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a}{1}+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a\cdot a}{1\cdot a}+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a^2+4-2a^2}{a}=\frac{a^2+4}{a}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо a какое-нибудь простое значение ($\neq 0$). После этого сравнить результаты.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{a^2+4}{a}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(a^2+4)/a}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.5. ПРЕДСТАВЬТЕ ВЫРАЖЕНИЕ $\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3$ В ВИДЕ ДРОБИ.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Подобно предыдущему заданию, складываем все слагаемые, чтобы они оказались под одной дробной чертой и образовали одну дробь.

$$\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3=\frac{3n^2}{5}+\frac{3n-5}{n}-\frac{3}{1}=\frac{3n^2\cdot n}{5\cdot n}+\frac{(3n-5)\cdot 5}{n\cdot 5}-\frac{3\cdot 5\cdot n}{1\cdot 5\cdot n}=$$

$$=\frac{3n^3+15n-25-15n}{5n}=\frac{3n^3-25}{5n}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо n какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $n=1$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3=-4\frac{2}{5}\quad \text{и}\quad \frac{3n^3-25}{5n}=-4\frac{2}{5},$$

Значит преобразование сделано правильно.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\frac{3n^3-25}{5n}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$(3n^3-25)/5n$

2.8. «РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ»

В следующей группе заданий требуется из предложенных квадратных трехчленов найти тот, который можно (или нельзя) разложить на линейные множители.

Перед решением типовых заданий этой группы уместно будет пояснить, что же скрывается за множеством «умных слов» в первом абзаце.

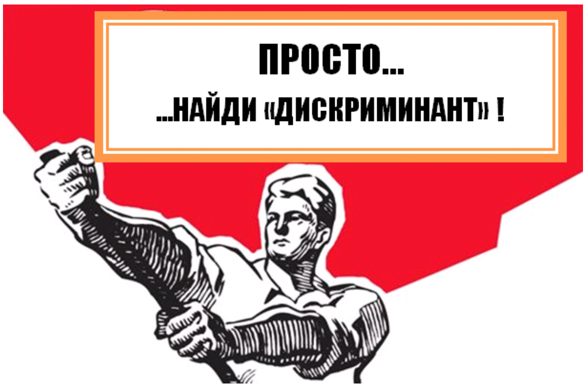
Квадратным трехчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа (причем, $a \neq 0$). Например, $2x^2 + 8x + 1$; $3x^2 - 7x + 5$; $-x^2 - 9x - 1$ и так далее.

Важный момент: в разбираемых заданиях не требуется раскладывать эти самые квадратные трехчлены на линейные множители, то есть на «умножаемые куски», а всего лишь спрашивается – можно ли это сделать? А раз так, то (в рамках именно этих заданий) не нужно даже знать, что такое «линейные множители» и как именно на них раскладываются многочлены – ведь делать этого здесь все равно не придется!

А определить, можно ли это сделать разложение, довольно просто – ответ на этот вопрос содержится в числах a, b и c трехчлена:
если выражение $b^2 - 4ac \geq 0$, то ответ – «можно»;
если выражение $b^2 - 4ac < 0$, то ответ – «нельзя».
Вот и все решение вопроса!

Как возможно вы помните, упомянутое выражение называется в математике словом «дискриминант» и обозначается буквой D: $D = b^2 - 4ac$.

А теперь рассмотрим несколько примеров.



ЗАДАНИЕ 2.8.1. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ НЕЛЬЗЯ РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x^2+15x+56}\quad \mathbf{2)}\ \boldsymbol{x^2-8x+16}\quad \mathbf{3)}\ \boldsymbol{x^2-4x+21}\quad \mathbf{4)}\ \boldsymbol{x^2-5x+11}$$

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $x^2+15x+56$

$D=15^2-4\cdot1\cdot56=225-224>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $x^2-8x+16$

$D=(-8)^2-4\cdot1\cdot16=64-64=0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $x^2-4x+21$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot21=16-81<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $x^2-5x+11$

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-11)=25+44>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

В подобных заданиях достаточно пересчитать все еще раз.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.2. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)\ 5x^2+4x+1 \quad 2)\ 2x^2-2x+1 \quad 3)\ 3x^2-5x+1 \quad 4)\ 7x^2+5x+1}$$

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $5x^2+4x+1$

$D=4^2-4\cdot5\cdot1=16-20<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $2x^2-2x+1$

$D=(-2)^2-4\cdot2\cdot1=4-8<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $3x^2-5x+1$

$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot1=25-12>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $7x^2+5x+1$

$D=5^2-4\cdot7\cdot1=25-28<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.3. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ НЕЛЬЗЯ РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ -t^2-2t+1 \qquad \mathbf{2)}\ -t^2-2t-1 \qquad \mathbf{3)}\ -t^2-1 \qquad \mathbf{4)}\ -t^2+1$$

В этом задании переменная вместо привычной «буковки» x обозначена непривычной «буковкой» t. Такая замена никак не влияет на наши действия, потому что значение дискриминанта определяется только значением чисел (коэффициентов) перед переменной.

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $-t^2-2t+1$

$D=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 1=4+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $-t^2-2t-1$

$D=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=4-4=0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $-t^2-1=-t^2+0\cdot t-1$

Многочлены в вариантах ответов 3) и 4)записаны в каком-то на первый взгляд странном, «усеченном» виде. Для удобства вычисления дискриминанта мы их рядом перезапишем в полном, «развернутом» виде, проставляя рядом с t значение $b=0$.

$D=0^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0-4<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $-t^2+1=-t^2+0\cdot t+1$

$D=0^2-4\cdot(-1)\cdot 1=0+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.4. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x^2-2x-1=0}\quad \mathbf{2)}\ \boldsymbol{x^2-4x+5=0}\quad \mathbf{3)}\ \boldsymbol{x^2-2x+9=0}\quad \mathbf{4)}\ \boldsymbol{x^2+2x+9=0}$$

В отличие от всех предыдущих трехчленов, сейчас мы видим перед собой уравнения: справа от всех трехчленов записано « $=0$ ». Не обращаем на это никакого внимания – на наших действиях это не отражается.

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $x^2-2x-1=0$

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=4+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $x^2-4x+5=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $x^2-2x+9=0$

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot9=4-36<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $x^2+2x+9=0$

$D=2^2-4\cdot1\cdot9=4-36<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 1).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАПОМНИТЬ:

Можно или нельзя разложить квадратный трехчлен (или квадратное уравнение) на множители, определяется знаком «дискриминанта» $D = b^2 - 4ac$:
если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то можно;
если $D = b^2 - 4ac < 0$, то нельзя.

А на следующем шаге подготовки к ГИА мы займемся многими так нелюбимыми, но весьма простыми, текстовыми задачами.